독립심화학습 9주차

2017103580 김정운

Pontaygain's minimum principle(이하 PMP) 또는 헤밀턴-야코비 방정식(HJB)을 통해 어떤 제어문제에 대한 최적해를 얻을 수 있다. 그러나 이러한 방식으로 문제를 풀기 전에 먼저 optimal control의 존재성부터 확인해야 하는데, 수치적인 방법으로 해당 방정식을 해결하는 경우가 많기 때문이다. 해의 존재성이 확인되지 않은 상황에서 PMP 또는 HJB로 최적제어항을 구하고자 한다면 수렴성이 확보되지 않아서 오류가 발생하거나, 수렴하더라도 잘못된 값을 얻을 수 있기 때문이다. 따라서 이번에는 이와 관련된 정리 3가지를 소개하고자 한다.

우선 문제설정에서 필요한 전재(또는 조건)부터 다룰려고 한다. Min subject to 라는 문제를 풀고자 한다면, 우선 함수 l은 연속적으로 미분이 가능해야 한다. 또한 는 (t,x,u)에 대해서 연속이어야 하며, 집합 E는 closed set이어야 한다. 이러한 조건을 classical regularity hypothesis라고 하며, optimal control에 대한 필요조건이 성립하는데 필요하다. 다음과 같은 조건들은 optimal control의 존재성을 담보하기 위해 공통적으로 필요하다.

우선 f(t,x,u)는 (x,u)에 대해 연속이고 t에 대해서는 meausrable하다. 또한 집합 U(.)는 measurable and compact set이며, 모든 (t,x)Rn에 대해 |f(x,t,u)|<=M(t)(1+|x|)를 만족하는 summable function M(t)가 존재해야 한다. 여기서 summable function이란 함수의 절댓값이 lebesque integralable인 함수를 말하며, f에 대한 두번째 제약조건은 f가 lebesque integrable on [a,b]와 동치가 된다. 또한 f(t,x,U(t))는 각 (t,x)에 대해 convex하며 state trajectory는 bounded해야 한다. 이러한 조건들이 모두 성립한다고 하면, optimal trajectory로 uniformly하게 수렴하는 subsequenece of state trajectory가 존재한다. 존재성에 대한 정리의 증명은 생략하도록 하겠다.

Optimal control의 존재성에 대한 정리가 성립하기 위한 가정들은 설정된 문제에 따라 조금씩 다르지만, 3번째 문단에서 언급된 조건들은 모두 성립해야 한다. Mayor problem, 또는 인 제어문제에서는 기존 조건뿐만 아니라, 함수 l이 lower semicontinuous이고 (t,x)에 대한 집합도 closed이어야 한다. 또한 state가 취할 수 있는 initial state가 bounded이어야 한다. 그러면 mayor problem에서 최소 1개 이상의 optimal control이 존재한다.

l과 가 0이 아닌 값을 취한다고 하면, control set U(t)는 closed and convex이어야 하고 (t,x)에 대한 집합은 closed이어야 한다. 또한 함수 l은 lower semicontinuous이고 는 (t,x,u)에 대해 lebesque measurable하다. 는 (x,u)에 대해 lower semicontinuous하며 (t,x,.)는 각 (t,x)에 대해 onvex하며 bounded below for all t,x,u가 성립해야 한다. 그리고 initial state는 bounded이며, u(t)<=k(t) for all u(t)를 성립하게 하는 k(t) or (t,x,u)>=a\*|u|^r+b for some a, b를 만족하는 r가 존재해야 한다. 그러면 cost function이 유한하면 optimal control은 존재할 수 있다.

만약 final time이 기존과 달리 variable이라고 한다면, 이전에 언급된 조건에 몇 가지가 추가되거나 수정되어야 한다. 이때 이전의 와 달리 시간에 대해 autonomous하다(즉, (x(t),u(t))). 우선control set U는 compact and convex이어야 하며, 는 (x,u)에 대해 lower semicontinuous, u에 대해 convex, 그리고 bounded below이어야 한다. 또한 E의 모둔 원소 x에 대해 f(x,U)n는 공집합이 아니다. 이러한 조건 하에서 cost와 final time이 유한하다고 하면 optimal control은 존재한다.

이와 같이 optimal control의 존재성을 보장하기 위한 전재들은 설정된 문제에 따라 조금씩 다르다. 하지만 공통적으로 어떤 집합의 closedness나 compactness, 어떤 함수의 lower semi continuous 및 bounded below을 요구하고 있다. 기존 실수 공간에서의 min max 정리를 일반화했다고 한다면, min-max 정리에서 필요했던 정의역의 compactness와 함수의 연속성이 각각 state(or control) set의 compactness와 제약조건 및 cost function의 lower semi continuous과 대응되었다고 볼 수 있다. 다만 optimal control에서는 특정 상황에 따라 함수나 집합의 convex가 해의 존재성으 증명하는데 필요하다.